1985

E.N.S.I. Chimie Centre Options P'-TB

# MATHÉMATIQUES

## PREMIÈRE PARTIE

DURÉE : 2 heures

---

Dans ce problème, $\alpha$ et $\beta$ désignent deux fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous noterons $\mathcal{D}_\alpha$ (resp. $\mathcal{D}_\beta$) le domaine de définition de $\alpha$ (resp. $\beta$). Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\alpha \cap \mathcal{D}_\beta$.

On se propose d'étudier l'équation différentielle (L), dite *équation de Lagrange*, suivante :

$$(L) \qquad y = x \cdot \alpha\left(\frac{dy}{dx}\right) + \beta\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

1° Intégrer l'équation (L) lorsque $\alpha$ et $\beta$ sont les fonctions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\alpha(t) = t - 1$ et $\beta(t) = t + 1$.

2° On suppose à présent que $\beta$ est identiquement nulle et que $\alpha$ est la fonction définie pour tout $t \geqslant 0$ par $\alpha(t) = \sqrt{t}$.

*a.* Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a < 0 < b$ et éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Déterminer toutes les fonctions $y = f(x)$ dérivables sur $]a, b[$ qui vérifient l'équation (L).

*b.* Tracer dans un repère orthonormé les courbes intégrales de (L) admettant pour asymptote la droite d'équation $y = -1$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ et passant respectivement par les points de coordonnées (2, 1), (1, 1) et (1, 2).

3° On suppose à présent que $\alpha$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\alpha(t) = t$ et que $\beta$ est deux fois dérivable sur son domaine de définition. L'équation (L) s'appelle alors une équation de Clairaut.

*a.* Montrer que si une fonction $y = f(x)$ est solution de (L) on a nécessairement soit $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$, soit

$$x + \beta'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

*b.* Montrer que pour tout $t \in \mathcal{D}_\beta$ il existe une unique droite $D_t$ de pente $t$ qui est une courbe intégrale de (L).

*c.* Soit C la courbe définie paramétriquement par les équations $x = -\beta'(t)$ et $y = \beta(t) - t\beta'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{D}_\beta$. Montrer que C est une courbe intégrale de (L) et que les droites $D_t$ définies ci-dessus sont les tangentes à C.

*d.* Existe-t-il des courbes intégrales de (L) autres que la courbe C et les droites $D_t$?

4° On suppose à présent que $\alpha$ et $\beta$ sont dérivables sur $\mathfrak{D}$ et que $\alpha(t) - t$ n'est pas identiquement nul pour $t \in \mathfrak{D}$.

Soit $\Gamma$ une courbe intégrale de (L) que l'on suppose paramétrée par la pente de sa tangente au point courant, c'est-à-dire que $\Gamma$ est la courbe d'équations paramétriques $x = x(t)$ et $y = y(t)$ avec $t \in \mathfrak{D}$ et que l'on a pour tout $t \in \mathfrak{D}$ l'identité $\frac{dy}{dx}(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = t$.

*a.* Exprimer $y(t)$ en fonction de $x(t)$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

*b.* Montrer que $x(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre suivante :

$$[\alpha(t) - t]\frac{dx}{dt}(t) + \alpha'(t)\,x(t) + \beta'(t) = 0 \qquad (1)$$

*c.* Réciproquement, montrer que si $x(t)$ est solution de l'équation (1), et si $y(t)$ est calculé en fonction de $x(t)$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ selon l'expression trouvée à la question 4° *a* ci-dessus, alors la courbe d'équations paramétriques $x = x(t)$ et $y = y(t)$ est une courbe intégrale de (L).

5° *Application* :

Donner une représentation paramétrique de la courbe intégrale de l'équation différentielle

$$xy'^2 - 2yy' + 3 = 0$$

qui passe par le point de coordonnées (3, 3), et étudier cette courbe.

1985

E.N.S.I. Chimie Centre Option P

# MATHÉMATIQUES

## DEUXIÈME PARTIE

DURÉE : 2 heures

---

*Notations :*

$\mathbb{R}$ étant le corps des réels et $v$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) de composantes $v_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, on rappelle que l'application :

$$\| \bullet \| : v \in \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \| v \| = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} | v_i |$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

On désigne par $C(\alpha, \beta)$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle réel $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$. A tout élément $f$ de $C(\alpha, \beta)$ on associe sa norme $\| f \|_{[\alpha, \beta]}$ définie par :

$$\| f \|_{[\alpha, \beta]} = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} | f(x) |$$

On désigne par $C^k(\alpha, \beta)$, ( $k$ entier strictement positif), l'ensemble des fonctions $k$ fois continûment dérivable sur $[\alpha, \beta]$.

$\mathcal{P}_3$ désigne l'ensemble des polynômes réels de la variable réelle $x$ de degré inférieur ou égal à 3.

---

Soit $[a, b]$ un intervalle réel ( $b > a$ ) que l'on divise en $n$ intervalles égaux de longueur $h$.

On pose :

$$x_i = a + i\,h \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$
$$x_n = b$$

Soit $f$ un élément de $C^4(a, b)$ dont les dérivées sont notées $f'$, $f''$, $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.

On pose :

$$f_i = f(x_i)$$
$$f'_i = f'(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$
$$f''_i = f''(x_i)$$

On se propose de déterminer, si elle existe, une fonction $g$ de $C^2(a, b)$ (dont les dérivées première et seconde sont notées $g'$ *et* $g''$ ) satisfaisant les conditions suivantes :

*Condition 1 :* $g$ coïncide dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, ( $i = 0, 1, \ldots, n-1$ ), avec un élément $P_i$ de $\mathcal{P}_3$.

*Condition 2 :* $g$ vérifie les égalités :

$$g(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$
$$g'(x_0) = f'_0$$
$$g'(x_n) = f'_n$$

1° Montrer que la fonction $g$ doit satisfaire l'ensemble des relations :

(1) $\quad P_i(x_i) = P_{i-1}(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$

(2) $\quad P'_i(x_i) = P'_{i-1}(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$

(3) $\quad P''_i(x_i) = P''_{i-1}(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$

(4) $\quad P_i(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n$

(5) $\quad P'_0(x_0) = f'_0$

(6) $\quad P'_{n-1}(x_n) = f'_n$

où P′ et P″ désignent les dérivées première et seconde de P.

2° *a.* On pose $g''(x_i) = m_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$

Démontrer que, quel que soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

(7) $$P''_i(x) = m_i \frac{x_{i+1} - x}{h} + m_{i+1} \frac{x - x_i}{h}$$

(8) $$P_i(x) = m_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + m_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + \alpha_i (x - x_i) + \beta_i$$

où $\alpha_i$ et $\beta_i$ sont deux constantes que l'on explicitera en fonction de $h, f_i, f_{i+1}, m_i$ et $m_{i+1}$.

*b.* Soit $m$ l'élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes $m_i$ ($i = 0, \ldots, n$).

Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle tridiagonale A d'ordre $n+1$ et un vecteur $d$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les composantes ne dépendent que de $f_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), $f'_0$, $f'_n$ et $h$, et tels que :

(9) $\qquad Am = d \quad$ où

(10)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\lambda_0 = \mu_n = 1$$

. . . .

$$\lambda_i = \mu_i = \frac{1}{2} \text{ sinon et :}$$

$$d_0 = \frac{6}{h^2}(f_1 - f_0 - h f'_0)$$

$$d_n = \frac{6}{h^2}(h f'_n - f_n + f_{n-1})$$

$$d_i = \frac{3}{h^2}(f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1}) \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

*c.* Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1}$

(11) $$\| v \| \leqslant \| A\, v \|$$

En déduire l'existence et l'unicité de $g$.

3° On définit :

(12) $$a_0 = d_0 - 2 f''_0 - \lambda_0 f''_1$$

(13) $$a_i = d_i - \mu_i f''_{i-1} - 2 f''_i - \lambda_i f''_{i+1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

(14) $$a_n = d_n - \mu_n f''_{n-1} - 2 f''_n$$

(15) $$L = \| f^{(4)} \|_{[a\,.\,b]}$$

3°1. Montrer en utilisant la formule de Taylor :

*a.* Que pour $i = 0$ ou $n$, $| a_i | \leqslant k h^2$ où $k$ est une constante que l'on exprimera en fonction de L.

*b.* Que pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ il existe quatre réels $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ et $\delta_i$ de l'intervalle $] x_{i-1}, x_{i+1} [$ tels que :

$$a_i = \frac{h^2}{8}[f^{(4)}(\alpha_i) + f^{(4)}(\beta_i) - 2 f^{(4)}(\gamma_i) - 2 f^{(4)}(\delta_i)]$$

En déduire que si $F''$ est l'élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes $f''_i$ ( $i = 0, 1, \ldots, n$ ) alors :

(16) $$\| m - F'' \| \leqslant \frac{3}{4} h^2 L$$

3°2. Soit $\Delta_i$ la fonction affine sur $[ x_i, x_{i+1} ]$ telle que :

(17) $$\Delta_i(x_i) = f''_i$$
$$\Delta_i(x_{i+1}) = f''_{i+1}$$

Soit H la fonction de la variable $u$ ( $u \in \mathbb{R}$ ) définie sur $[ x_i, x_{i+1} ]$ par la relation :

(18) $$H(u) = f''(u) - \Delta_i(u) - [f''(x) - \Delta_i(x)] \frac{(u - x_i)(u - x_{i+1})}{(x - x_i)(x - x_{i+1})}$$

où $x \in ] x_i, x_{i+1} [$ est fixé.

Montrer que la fonction $H'' = \frac{d^2 H}{du^2}$ possède au moins une racine sur l'intervalle $]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[$ et en déduire que :

$$\| \Delta_i - f'' \|_{[x_i,\, x_{i+1}]} \leqslant \frac{h^2}{8} L \tag{19}$$

Compte tenu de l'inégalité triangulaire :

$$\| g'' - f'' \|_{[x_i,\, x_{i+1}]} \leqslant \| g'' - \Delta_i \|_{[x_i,\, x_{i+1}]} + \| \Delta_i - f'' \|_{[x_i,\, x_{i+1}]} \tag{20}$$

démontrer que :

$$\| g'' - f'' \|_{[a\,,\,b]} \leqslant k_1\, h^2 \tag{21}$$

où $k_1$ est une constante que l'on précisera.

3°3. Montrer qu'il existe au moins un point $\xi_i$ de l'intervalle $]\, x_i\,,\, x_{i+1}\,[$ tel que :

$$f'(\xi_i) = g'(\xi_i). \tag{22}$$

En déduire les inégalités :

$$\| g' - f' \|_{[a\,,\,b]} \leqslant k_2\, h^3 \tag{23}$$

$$\| g - f \|_{[a\,,\,b]} \leqslant k_3\, h^4 \tag{24}$$

où $k_2$ et $k_3$ sont deux constantes que l'on explicitera.

1985

E.N.S.I. Chimie Centre Option TB

# MATHÉMATIQUES

## DEUXIÈME PARTIE

DURÉE : 2 heures

*L'épreuve se compose d'un exercice et d'un problème indépendants*

## EXERCICE

E est un ensemble fini à $n$ éléments, et $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1° Quel est le nombre de couples $(X_1, X_2) \in \mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ tels que $X_1 \subset X_2$ ?

2° Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre d'éléments

$$(X_1, X_2, ..., X_r) \in (\mathfrak{P}(E))^r$$

tels que :

$$X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_r ?$$

## PROBLÈME

Dans tout le problème, P désigne le demi-plan de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$$

On note $\mathcal{C}^k(P)$ (où $k \in \mathbb{N}$) l'ensemble de toutes les fonctions de P dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

Enfin, on note $E_g$ l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$$

où $(x, y) \in P$ ; $g \in \mathcal{C}^0(P)$ est donnée et $u \in \mathcal{C}^1(P)$ est l'inconnue.

1° On prend $g = 0$. Résoudre l'équation $E_0$ par le changement de variables $\alpha = x + y$ ; $\beta = x - y$.

2° *a.* Soient $k : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On prend $g(x, y) = k(x + y) f(x)$.

Montrer que $f_1(x)\, k(x + y)$ est une solution particulière de $E_g$ ($f_1$ est une primitive de $f$).

*b.* Quelle solution particulière obtient-on, de forme analogue si $g(x, y) = k(x + y) f(y)$ ?

3° On choisit :

$$g_0(x, y) = \frac{\sqrt{x + y}}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

Déterminer $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $(\forall (x, y) \in P)$ :

$$g_0(x, y) = \varphi(x + y)\left[\frac{a(x + y)}{1 + y^2} + \frac{by}{1 + y^2} + \frac{c(x + y)}{1 + x^2} - \frac{dx}{1 + x^2}\right]$$

4° En déduire une solution particulière de $Eg_0$, puis l'ensemble des solutions de $Eg_0$.

5° *a.* Montrer qu'il existe exactement une solution $\omega$ de $Eg_0$ qui vérifie :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \qquad \omega(x, x) = 0. \qquad \text{Expliciter } \omega.$$

*b.* Soit $h \in \mathbb{R}^{+*}$ donné.

Montrer $(\forall (x, y) \in P) \qquad x + y = h \Rightarrow |\omega(x, y)| \leqslant \frac{\pi\sqrt{h}}{h^2 + 4}$

*c.* Pour quelles valeurs du réel $m$ la fonction $\theta$ :

$$(x, y) \longrightarrow \theta(x, y) = (x + y)^m \omega(x, y)$$

est-elle bornée dans P ?